

수학 영역

1. $2^{\frac{3}{2}} \times 4^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 1번]

- ① 2^{-1} ② $2^{-\frac{1}{2}}$ ③ 1
- ④ $2^{\frac{1}{2}}$ ⑤ 2

2. 함수 $f(x)=2x^3-x-4$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ 의

값은?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 2번]

- ① 19 ② 21 ③ 23
- ④ 25 ⑤ 27

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2=2$, $a_{10}-a_7=9$ 일 때, a_7 의 값은?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 3번]

- ① 16
- ② 17
- ③ 18
- ④ 19
- ⑤ 20

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 7x+a & (x\leq 2) \\ x^2+ax & (x>2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 4번]

- ① 9
- ② 10
- ③ 11
- ④ 12
- ⑤ 13

5. $\int_0^2 (2x^3 + 6x^2 - x)dx$ 의 값은?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 5번]

- ① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

6. 두 양수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = a \sin \frac{x}{b} + 2$ 의 최댓값이

5이고 주기가 8π 일 때, $a+b$ 의 값은?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 6번]

- ① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

7. 함수 $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 4ax$ 가 $x = 1$ 에서 극소일 때,
 $f(x)$ 의 극댓값은? (단, a 는 상수이다.)
 [2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 7번]

- ① 19 ② 20 ③ 21
- ④ 22 ⑤ 23

8. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터
 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $\frac{S_3}{a_1 + 2a_2} = \frac{7}{3}$ 일 때, $\frac{a_8}{a_6}$ 의
 값은?
 [2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 8번]

- ① 4 ② 9 ③ 16
- ④ 25 ⑤ 36

9. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 시각이 $t(t \geq 0)$ 일 때 두 점 P, Q의 위치가 각각

$$x_1 = 4t^3 - t^2 - 11t, \quad x_2 = 2t^2 + 7t + 3$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q의 가속도를 각각 p, q 라 할 때, $p - q$ 의 값은?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 9번]

- ① 30 ② 33 ③ 36
④ 39 ⑤ 42

10. 상수 $a(a > 1)$ 에 대하여 직선 $y = 7$ 이 두 곡선 $y = 16a^x$, $y = \frac{1}{4}a^x$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB} = 4$ 일 때, a 의 값은?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 10번]

- ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

11. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_{-1}^x f(t) dt = xf(x) - 2x^3 - 3x^2 + 6$$

을 만족시킬 때, $f(0)$ 의 값은?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 11번]

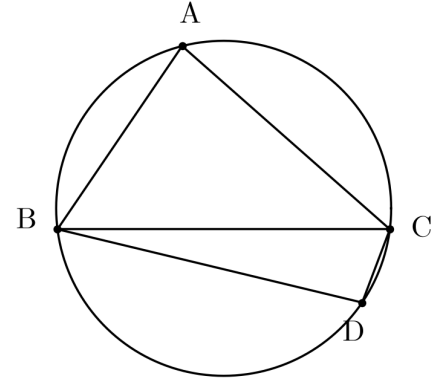
- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$, $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$ 인 삼각형

ABC 의 외접원에서 점 A 를 포함하지 않는 호 BC 위에 점

D 가 있다. $\sin(\angle BCD)=\frac{\sqrt{14}}{4}$ 일 때, 선분 BD 의 길이는?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 12번]



- ① $2\sqrt{7}$ ② $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{7\sqrt{10}}{4}$
 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{10}}{5}$

13. 최고차항의 계수가 6인 이차함수 $f(x)$ 가 $f(0)=0$,
 $\int_0^2 f(x)dx=4$ 를 만족시킨다. <보기>에서 옳은 것만을 있는
 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $\int_0^2 |f(x)|dx=6$

ㄴ. $g(1)=0$ 인 일차함수 $g(x)$ 에 대하여
 $\int_0^2 (f(x)+g(x))dx=4$ 이다.

ㄷ. $k>6$ 인 각각의 실수 k 에 대하여,
 $\int_0^2 (f(x)+h(x))dx=4$ 와
 $\int_0^2 |f(x)+h(x)|dx=k$ 를
 동시에 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 가 존재한다.

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 13번]

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 5 & (x \text{ 가 자연수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{x} & (x \text{ 가 자연수인 경우}) \end{cases}$$

에 대하여, $\sum_{k=1}^n \frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 300

이하의 자연수 n 의 개수는?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 14번]

- ① 135 ② 144 ③ 153
 ④ 162 ⑤ 171

15. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은?

<조건>
모든 실수 a 에 대하여
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(2x+1)f(x)}{f(x)+f(x-t)}$$
의 값이 존재하도록 하는 양수 t 의 집합은
 $\left\{t \mid t \geq \frac{3}{2}\right\}$ 이다.

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 15번]

- ① $\frac{5}{2}$ ② 5 ③ $\frac{15}{2}$
- ④ 10 ⑤ $\frac{25}{2}$

16. 방정식

$$\log_3(x-3)=\log_9(2x-3)$$

을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오.

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 16번]

17. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 6x^2 - 2x$ 이고
 $f(0) = 10$ 일 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오.
 [2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 17번]

18. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 28$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n \text{ 이 짝수인 경우}) \\ 2a_n + 12 & (a_n \text{ 이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, a_6 의 값을 구하시오.

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 18번]

19. 기울기가 8이고 y 절편이 양수인 직선이 곡선 $y = x^3 - 3x^2 - x + 2$ 에 접할 때, 이 직선은 점 $(1, k)$ 를 지난다. k 의 값을 구하시오.

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 19번]

20. $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 정의된 두 함수 $f(x) = \sin x$, $g(x) = -k \cos x$ ($k > 1$)가 있다. 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 가 제1사분면에서 만나는 점을 A, 제4사분면에서 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y = g(x)$ 와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하고, 점 B를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 하자. 다음은 (삼각형 CDB의 넓이) : (삼각형 AOD의 넓이) = 14 : 5일 때, 상수 k 의 값을 구하는 과정의 일부이다. (단, O는 원점이다.)

두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 그림과 같다.

점 A의 x 좌표를 a 라 하면 두 점 B, D의 좌표는 다음과 같다.

$$B(\boxed{\text{가}}, -\sin a), D(\boxed{\text{나}}, -\sin a)$$

삼각형 CDB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{DB} \times 2 \sin a$ 이고,

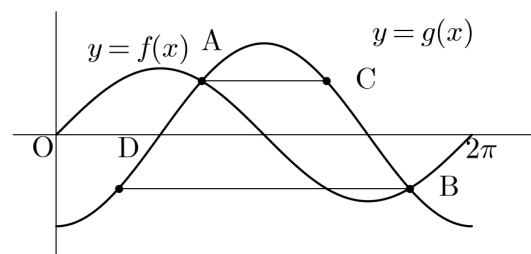
$$(\text{삼각형 AOD의 넓이}) = \frac{5}{14} \times (\text{삼각형 CDB의 넓이})$$

이므로 $a = \boxed{\text{다}}$ 이다. 따라서 $k = -\tan(\boxed{\text{다}})$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $p(a)$, $q(a)$ 라 하고,

(다)에 알맞은 수를 α 라 하자. $3 \times \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}$ 의 값을 구하시오.

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 20번]



21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$ 의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하시오.

<조건>

(가) 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(나) $g(x)=\begin{cases} -f(x) & (f(x) \geq 0) \\ 7f(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$

일 때, 어떤 실수 a 에 대하여 함수 $h(x)=g(x)+|(x-1)(x-a)(x-4+a)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 21번]

22. 상수 $a(a>1)$ 과 직사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

<조건>

(가) 두 곡선 $y=a^x$, $y=2x^2-\frac{7}{2}x+3$ 은 모두 점 A와 점 B를 지난다.

(나) 두 곡선 $y=\log_a\left(x-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}$,

$y=2x^2-\frac{15}{2}x+\frac{15}{2}$ 는 모두 점 C와 점 D를 지난다.

$a^3=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 공통 22번]

23. 다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 3, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 확률과 통계 23번]

- ① 20
- ② 24
- ③ 28
- ④ 32
- ⑤ 36

24. 두 사건 A, B 에 대하여 $P(B|A) = \frac{2}{3}$, $P(A^c) = \frac{2}{5}$ 일 때,

$P(A \cap B)$ 의 값은?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 확률과 통계 24번]

- ① $\frac{1}{10}$
- ② $\frac{1}{5}$
- ③ $\frac{3}{10}$
- ④ $\frac{2}{5}$
- ⑤ $\frac{1}{2}$

25. $\left(2x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^4$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 확률과 통계 25번]

- ① 8 ② 12 ③ 16
④ 20 ⑤ 24

26. 한 개의 주사위를 두 번 던져 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 하자. a 가 3 이하이거나 $a \times b$ 가 8의 배수일 확률은?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 확률과 통계 26번]

- ① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{11}{18}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{13}{18}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

27. 정규분포 $N(1, \sigma^2)$ 을 따르는 확률변수 X 에 대하여
 $P\left(\frac{3}{2}\sigma \leq X \leq 2\sigma\right) = 0.044$ 일 때, $P\left(X \geq \frac{10}{7}\right)$ 의 값을 다음
 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, σ 는 양수이다.)
 [2027학년도 평가원 9월 모의평가 확률과 통계 27번]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

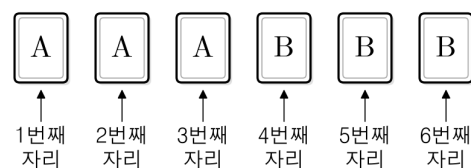
- ① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668
 ④ 0.1587 ⑤ 0.3085

28. 그림과 같이 문자 A가 적힌 3장의 카드와 문자 B가
 적힌 3장의 카드가 1번째 자리에서부터 차례로 A, A, A,
 B, B, B가 보이도록 놓여 있다. 이 6장의 카드와 한 개의
 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k 일 때,
 $k \leq 5$ 이면 k 번째 자리에 놓여 있는 카드와 $(k+1)$ 번째
 자리에 놓여 있는 카드를 서로 바꾸어 놓고, $k=6$ 이면
 놓여 있는 6장의 카드를 그대로 둔다.

이 시행을 4번 반복한 후 6장의 카드가 1번째 자리에서부터
 차례로 A, A, A, B, B, B가 보이도록 놓여 있을 때, 3번째
 시행에서 나온 눈의 수가 6일 확률은?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 확률과 통계 28번]



- ① $\frac{71}{373}$ ② $\frac{69}{373}$ ③ $\frac{73}{371}$
 ④ $\frac{71}{371}$ ⑤ $\frac{69}{371}$

29. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하시오.

<조건>

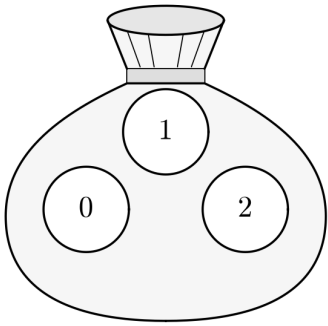
(가) $a+b+c+d=14$

(나) $10a \geq d$ 이고 $c < d^2$ 이다.

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 확률과 통계 29번]

30. 숫자 0, 1, 2가 각각 하나씩 적혀 있는 세 개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 5번 반복하여 확인한 5개의 수의 평균을 $\bar{X}$ 라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} \left(k^2 \times P\left(\bar{X} = \frac{k}{5}\right) \right) = a$ 이다. $6 \times a$ 의 값을 구하시오.

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 확률과 통계 30번]



31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(2x+1)}$ 의 값은?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 미적분 23번]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

32. $\int_0^1 (3x+1)e^x dx$ 의 값은?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 미적분 24번]

- ① $e+2$ ② $2e$ ③ $e+3$
 ④ $2e+1$ ⑤ $2e+2$

33. 정수 k 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을

$a_n = \left(\frac{k^2 - 20}{16}\right)^n$ 이라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하도록 하는 k 의 개수는?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 미적분 25번]

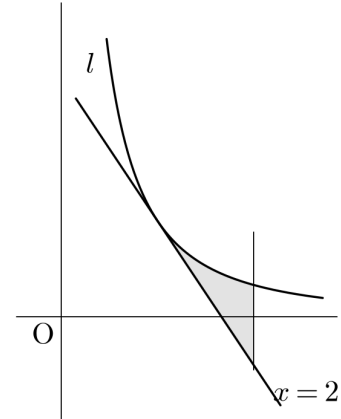
- ① 2 ② 5 ③ 8
④ 11 ⑤ 14

34. 곡선 $y = \frac{2}{x^2 + x}$ ($x > 0$) 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선을

l 이라 하자. 곡선 $y = \frac{2}{x^2 + x}$ ($x > 0$)과 직선 l 및 직선

$x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 미적분 26번]

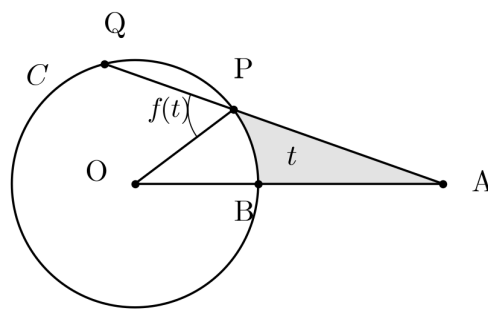


- ① $2\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{3}$ ② $2\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{4}$ ③ $2\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{8}$
④ $2\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{4}$ ⑤ $2\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{8}$

35. 함수 $f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$ 에 대하여 $x \geq -2$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 는 $x > -2$ 에서 미분가능하고 $t \geq e$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $g(f(t)) = t^2$ 을 만족시킨다. $x > \frac{1}{e}$ 에서 정의된 함수 $h(x) = g(f(x))$ 에 대하여 $h'(1)$ 의 값은?
[2027학년도 평가원 9월 모의평가 미적분 27번]

- ① $-\frac{e^{2\sqrt{3}}}{3}$ ② $-\frac{2e^{2\sqrt{3}}}{5}$ ③ $-\frac{e^{2\sqrt{3}}}{2}$
④ $-\frac{2e^{2\sqrt{3}}}{3}$ ⑤ $-e^{2\sqrt{3}}$

36. 점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C 가 있다. $\overline{OA} = 5$ 인 점 A 에 대하여 선분 OA 와 원 C 가 만나는 점을 B 라 하자. 점 A 를 지나고 점 O 를 지나지 않는 직선이 원 C 와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 점을 P , $Q(\overline{AP} < \overline{AQ})$ 라 하자. 점 Q 를 포함하지 않는 호 BP 와 두 선분 AB , AP 로 둘러싸인 도형의 넓이를 t 라 할 때, $\angle OPQ = f(t)$ 라 하면 $f(t)$ 는 미분가능한 함수이다.
 $\tan f(k) = \frac{3}{2}$ 인 실수 k 에 대하여 $f'(k)$ 의 값은?
[2027학년도 평가원 9월 모의평가 미적분 28번]



- ① $\frac{7}{13}$ ② $\frac{15}{26}$ ③ $\frac{8}{13}$
④ $\frac{17}{26}$ ⑤ $\frac{9}{13}$

37. 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$ 을 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_n = \begin{cases} a_n - a_1 & (|a_n| \geq 10) \\ (a_n)^2 & (|a_n| < 10) \end{cases}$$

이라 하자. 수열 $\{b_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

<조건>

(가) $(b_2)^2 = 36b_3$

(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 수렴하고 그 합은 12이다.

$a_1 > 0$ 이고 $a_2 < 0$ 일 때, $36 \times a_4 \times a_6$ 의 값을 구하시오.

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 미적분 29번]

38. 함수 $f(x) = 2^{2x + \frac{1}{2}\cos\pi x}$ 의 역함수 $g(x)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 도함수를 갖는다.

$$\frac{1}{4} \int_{f(1)}^{f(3)} g(x) dx + \int_{f(0)}^{f(2)} \frac{2^{4g(x)} g'(x)}{x} dx = \frac{q}{p} \sqrt{2}$$

일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 미적분 30번]

39. 두 벡터 $\vec{a}=(k, 2)$, $\vec{b}=(k, 3)$ 에 대하여 $2\vec{a}+\vec{b}$ 의 모든
성분의 합이 10일 때, k 의 값은?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 기하 23번]

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

40. 좌표공간의 두 점 $A(a, -4, 0)$, $B(6, b, 5)$ 에 대하여 선분
 AB 를 3:2로 내분하는 점의 좌표가 $(4, -1, 3)$ 일 때, $a+b$ 의
값은?

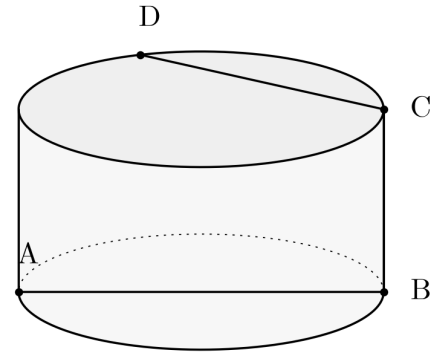
[2027학년도 평가원 9월 모의평가 기하 24번]

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

41. 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)이고 단축의 길이가 6인 타원이 점 $(4, \sqrt{5})$ 를 지날 때, 선분 FF' 의 길이는?
[2027학년도 평가원 9월 모의평가 기하 25번]

- ① $4\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{2}$
④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $8\sqrt{2}$

42. 그림과 같이 밑면의 지름의 길이가 6, 높이가 3인 원기둥이 있다. 선분 AB 는 이 원기둥의 한 밑면의 지름이고, C , D 는 다른 밑면의 둘레 위의 서로 다른 두 점이다. $\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=2\sqrt{6}$ 일 때, 삼각형 ABD 의 넓이는?
[2027학년도 평가원 9월 모의평가 기하 26번]



- ① $3\sqrt{13}$ ② $3\sqrt{14}$ ③ $3\sqrt{15}$
④ 12 ⑤ $3\sqrt{17}$

43. 양수 p 에 대하여 포물선 $y^2 = 4px$ 위에 있는 제1사분면 위의 점 중 초점까지의 거리가 $3p$ 인 점을 A라 하자. 포물선 위의 점 A에서의 접선을 l 이라 할 때, 직선 l 이 y 축과 만나는 점을 B, 직선 l 과 수직이고 점 A를 지나는 직선이 y 축과 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ACB의 넓이가 $16\sqrt{2}$ 일 때, p 의 값은?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 기하 27번]

- ① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
 ④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

44. 좌표공간에 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 구 S 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

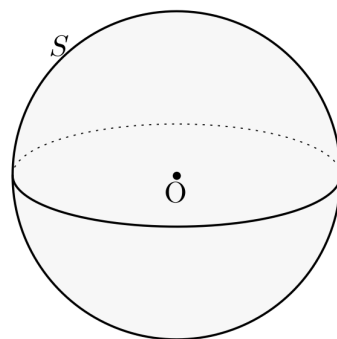
<조건>

(가) 직선 OD와 평면 ABC는 서로 평행하다.

(나) $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD}$

삼각형 OAB의 평면 OAC 위로의 정사영의 넓이는?

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 기하 28번]



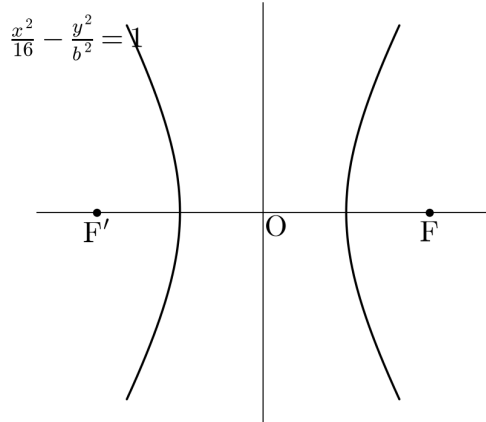
- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ③ $\sqrt{2}$
 ④ $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

45. 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)인 쌍곡선

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$)이 있다. 점 $P(0, p)$ ($p > 0$)에 대하여 이

쌍곡선과 두 선분 PF , PF' 이 만나는 점을 각각 A , B 라 할 때, 두 초점이 A , B 인 타원이 두 점 F , P 를 지난다. 점 P 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 직선 AF' 과 만나는 점을 C 라 하자. $\angle APF' = \angle APC$ 일 때, 삼각형 ACP 의 둘레의 길이를 구하시오.

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 기하 29번]



46. 평면 α 위에 있는 사다리꼴 $ABCD$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

<조건>

(가) $\overline{AB} = 24$, $\overline{AD} = \overline{BC} = 13\sqrt{2}$, $\angle ABC = \angle BAD < \frac{\pi}{2}$

(나) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XD} = \overrightarrow{XB} \cdot \overrightarrow{XC} = 0$$

을 만족시키는 평면 α 위의 모든 점 X 에 대하여

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AX}$ 의 값의 합을 구하시오.

[2027학년도 평가원 9월 모의평가 기하 30번]

2027학년도 평가원 9월 모의평가(해설)

2026.09.02

1) [정답] ④

[발상]

두 거듭제곱의 밑이 2와 4로 다르다. $4=2^2$ 으로 고쳐
「밑을 2 하나로 모으면」 남은 일은 지수를 더하는
것뿐이다.

[풀이]

 $4=2^2$ 이므로

$$4^{-\frac{1}{2}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1}$$

따라서

$$\begin{aligned} 2^{\frac{3}{2}} \times 4^{-\frac{1}{2}} &= 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{-1} \\ &= 2^{\frac{3}{2}-1} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2) [정답] ③

[발상]

분모가 $x-2$ 이고 분자가 $f(x)-f(2)$ 이면 그 극한은 「정의
그대로 $f'(2)$ 」이다. 극한을 직접 계산하지 말고 도함수를
구해 대입한다.

[풀이]

주어진 극한은 함수 $f(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수다.

$$f(x) = 2x^3 - x - 4 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 1$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 6 \times 2^2 - 1 = 23$$

3) [정답] ②

[발상]

두 항의 차는 공차의 배수다. 「 $a_{10} - a_7$ 는 공차 세
번」이므로 그 한 줄이 공차를 정하고, 나머지는 a_2 에서
걸어가면 된다.

[풀이]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_{10} - a_7 = 3d$$

$$\text{이므로 } 3d = 9, d = 3$$

따라서

$$a_7 = a_2 + 5d = 2 + 5 \times 3 = 17$$

4) [정답] ②

[발상]

이어 붙는 자리는 $x=2$ 한 점뿐이다. 「그 점에서 두 식의
값이 같다」는 것이 상수를 정하는 유일한 조건이다.

[풀이]

$x \leq 2$ 에서와 $x > 2$ 에서 각각 다항함수이므로 $x \neq 2$ 에서는
연속이다. 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면
 $x=2$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$$

이다. 곧

$$2^2 + a \times 2 = 7 \times 2 + a$$

$$4 + 2a = 14 + a$$

따라서 $a = 10$

5) [정답] ①

[발상]

피적분함수가 다항식이라 부정적분이 바로 나온다. 「항마다
차수를 하나 올리고」 위끝과 아래끝을 대입하는 것으로
끝난다.

[풀이]

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2x^3 + 6x^2 - x) dx &= \left[\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \times 16 + 2 \times 8 - \frac{1}{2} \times 4 \right) - 0 \\ &= 8 + 16 - 2 \\ &= 22 \end{aligned}$$

6) [정답] ⑤

[발상]

사인함수는 진폭과 축이 최댓값을 만들고 주기는 안쪽
계수가 만든다. 「최댓값이 $a+2$ 이고 주기가 $2\pi b$ 」이므로 두
조건이 각각 한 문자를 곧바로 준다.

[풀이]

$a > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $a+2$ 이다.

$a+2=5$ 에서 $a=3$

또 함수 $f(x)=a\sin\frac{x}{b}+2$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{b}\right|}=2\pi b$$

이므로 $2\pi b=8\pi$ 에서 $b=4$

따라서

$$a+b=3+4=7$$

7) [정답] ②

[발상]

극소라는 조건은 「 $f'(1)=0$ 한 줄」로 옮겨진다. 그것으로 a 를 정하고 나면 도함수의 나머지 근이 극대인 자리다.

[풀이]

$$f(x)=2x^3+ax^2-4ax \text{에서}$$

$$f'(x)=6x^2+2ax-4a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극소이므로 $f'(1)=0$ 이다.

$$6+2a-4a=0 \text{에서 } a=3$$

이때

$$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$$

이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극대이고 $x=1$ 에서 극소이므로 주어진 조건과 맞는다.

따라서 구하는 극댓값은

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2 \times (-8) + 3 \times 4 - 4 \times 3 \times (-2) \\ &= -16 + 12 + 24 = 20 \end{aligned}$$

8) [정답] ③

[발상]

첫째항을 모르는 채로도 된다. 분자와 분모를 a_1 로 나누면 「공비 r 만의 이차방정식」이 남고, 모든 항이 양수라는 조건이 두 근 중 하나를 지운다.

[풀이]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 모든 항이 양수이므로 $a > 0$, $r > 0$ 이다.

$$S_3 = a + ar + ar^2, \quad a_1 + 2a_2 = a + 2ar$$

이므로

$$\frac{S_3}{a_1 + 2a_2} = \frac{a(1+r+r^2)}{a(1+2r)} = \frac{1+r+r^2}{1+2r} = \frac{7}{3}$$

에서

$$3(1+r+r^2)=7(1+2r), \quad 3r^2-11r-4=0$$

$$(3r+1)(r-4)=0$$

$r > 0$ 이므로 $r=4$

따라서

$$\frac{a_8}{a_6} = r^2 = 16$$

9) [정답] ①

[발상]

위치를 미분한 것이 속도이고 한 번 더 미분한 것이 가속도다. 「속도가 같아지는 순간」을 먼저 구해 두면 그 뒤는 대입뿐이다.

[풀이]

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도를 각각 v_1, v_2 라 하면

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 12t^2 - 2t - 11, \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} = 4t + 7$$

두 속도가 같아지는 순간은 $v_1 = v_2$ 에서

$$12t^2 - 2t - 11 = 4t + 7, \quad 12t^2 - 6t - 18 = 0$$

$$2t^2 - t - 3 = 0, \quad (2t-3)(t+1) = 0$$

$$t \geq 0 \text{이므로 } t = \frac{3}{2}$$

두 점의 가속도는 각각

$$\frac{dv_1}{dt} = 24t - 2, \quad \frac{dv_2}{dt} = 4$$

$$\text{이므로 } t = \frac{3}{2} \text{ 일 때}$$

$$p = 24 \times \frac{3}{2} - 2 = 34, \quad q = 4$$

따라서

$$p - q = 34 - 4 = 30$$

10) [정답] ③

[발상]

두 점의 y 좌표가 같으므로 「선분의 길이는 두 x 좌표의 차」다. 그 차를 로그로 적으면 계수 16과 $\frac{1}{4}$ 만 남아 밑이 정해진다.

[풀이]

점 A의 x 좌표를 α 라 하면 $16a^\alpha = 7$ 이므로

$$a^\alpha = \frac{7}{16}, \alpha = \log_a \frac{7}{16}$$

점 B의 x 좌표를 β 라 하면 $\frac{1}{4}a^\beta = 7$ 이므로

$$a^\beta = 28, \beta = \log_a 28$$

두 점의 y 좌표가 모두 7로 같으므로 선분 AB의 길이는 두 x 좌표의 차다. $a > 1$ 이고 $28 > \frac{7}{16}$ 이므로 $\beta > \alpha$ 이고

$$\overline{AB} = \beta - \alpha = \log_a 28 - \log_a \frac{7}{16} = \log_a \left(28 \times \frac{16}{7} \right) = \log_a 64$$

따라서 $\log_a 64 = 4$ 에서

$$a^4 = 64, a = 64^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

11) [정답] ③

[발상]

적분 기호 안에 미지의 함수가 들어 있다. 「양변을 x 에 대하여 미분하면」 적분이 풀리고 도함수의 식이 드러난다. 적분상수는 $x = -1$ 을 대입해 정한다.

[풀이]

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 6x^2 - 6x$$

이므로

$$xf'(x) = 6x^2 + 6x = x(6x + 6)$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하고 $f'(x)$ 가 다항함수이므로

$$f'(x) = 6x + 6$$

따라서 $f(x) = 3x^2 + 6x + C$ (C 는 적분상수)로 놓을 수 있다.

한편 주어진 등식에 $x = -1$ 을 대입하면 좌변이 0이므로

$$0 = -f(-1) + 2 - 3 + 6$$

$$\text{에서 } f(-1) = 5$$

$$\text{이때 } f(-1) = 3 - 6 + C = C - 3 \text{이므로 } C = 8$$

$$\text{그러므로 } f(x) = 3x^2 + 6x + 8 \text{이고}$$

$$f(0) = 8$$

12) [정답] ④

[발상]

같은 원 위의 현이라 「한 원의 지름 $2R$ 이 두 각을 잇는다」. 코사인법칙으로 $\overline{BC}$ 를 구해 지름을 얻으면 사인법칙이 곧바로 $\overline{BD}$ 를 준다.

[풀이]

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\angle BAC)$$

$$= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{1}{8} = 41 - 5 = 36$$

$$\text{이므로 } \overline{BC} = 6$$

또 $0 < \angle BAC < \pi$ 이므로 $\sin(\angle BAC) > 0$ 이고

$$\sin(\angle BAC) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{63}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = \frac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{16}{\sqrt{7}}$$

점 D가 삼각형 ABC의 외접원 위에 있으므로 삼각형

BCD의 외접원도 반지름의 길이가 R 인 같은 원이다. 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)} = 2R$$

이므로

$$\overline{BD} = 2R \times \sin(\angle BCD) = \frac{16}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{4\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = 4\sqrt{2}$$

13) [정답] ⑤

[발상]

두 조건이 이차함수를 하나로 못 박는다. 「 f 를 먼저 확정하고」 세 명제를 따로 본다. ㄷ은 값을 하나 찾는 것이 아니라 $k > 6$ 마다 존재한다는 말이므로 연속함수의 중간값을 쓴다.

[풀이]

최고차항의 계수가 6이고 $f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = 6x^2 + bx$ (b 는 상수)로 놓을 수 있다.

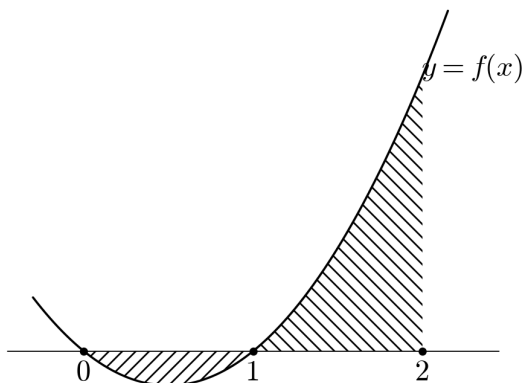
$$\int_0^2 f(x) dx = \left[2x^3 + \frac{b}{2}x^2 \right]_0^2 = 16 + 2b = 4$$

이므로 $b = -6$ 이고

$$f(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$$

이 이차함수의 두 근은 $x = 0$ 과 $x = 1$ 이므로 적분 구간

$0 \leq x \leq 2$ 안에서 f 의 부호는 $x = 1$ 에서 한 번 바뀐다.



ㄱ. 그림에서 곡선은 $x=1$ 을 사이에 두고 축 아래에서 축 위로 올라선다. 곧 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이고 $1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로 절댓값은 구간 $0 \leq x \leq 1$ 에서만 부호를 뒤집는다. 빗금 친 두 넓이를 더하면

$$\begin{aligned} \int_0^2 |f(x)| dx &= - \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= - [2x^3 - 3x^2]_0^1 + [2x^3 - 3x^2]_1^2 \\ &= -(-1) + \{4 - (-1)\} = 1 + 5 = 6 \end{aligned}$$

이므로 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $g(1)=0$ 인 일차함수 $g(x)$ 는 $g(x)=m(x-1)$ ($m \neq 0$)으로 적을 수 있고

$$\int_0^2 g(x) dx = m \left[\frac{(x-1)^2}{2} \right]_0^2 = m \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

이므로 $\int_0^2 \{f(x) + g(x)\} dx = 4 + 0 = 4$ 이다. ㄴ은 참이다.

ㄷ. 일차함수 $h(x)=px+q$ ($p \neq 0$)가

$$\int_0^2 \{f(x) + h(x)\} dx = 4 \text{를 만족시키려면}$$

$$\int_0^2 h(x) dx = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$\int_0^2 (px+q) dx = 2p + 2q = 0, \quad q = -p$$

곧 $h(x)=p(x-1)$ 이고

$$f(x) + h(x) = 6x(x-1) + p(x-1) = (x-1)(6x+p)$$

여기서 $p > 0$ 이면 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $6x+p > 0$ 이므로

$$|f(x) + h(x)| = |x-1|(6x+p) \text{이고}$$

$$\int_0^2 |x-1|(6x+p) dx = \int_0^1 6x|x-1| dx + p \int_0^2 |x-1| dx$$

이다. 두 적분은

$$\int_0^1 6x|x-1| dx = \int_0^1 6x(1-x) dx + \int_1^2 6x(x-1) dx = 1 + 5 = 6$$

$$\int_0^2 |x-1| dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

이므로

$$\int_0^2 |f(x) + h(x)| dx = 6 + p$$

따라서 $k > 6$ 인 각각의 실수 k 에 대하여 $p = k - 6 > 0$ 으로

잡으면 $h(x)=(k-6)(x-1)$ 이 두 조건을 모두 만족시킨다. ㄷ은 참이다.

한편 $p < 0$ 이면 $6x+p=0$ 의 근 $x=-\frac{p}{6}$ 이 양수이고, 그것이

구간 $0 \leq x \leq 2$ 안에 드는 것은 $-12 \leq p < 0$ 일 때다. 그 범위에서는 부호가 한 번 더 바뀌어 위의 식이 그대로 서지

않는다. 실제로 $p=-3$ 일 때 적분값은 $\frac{17}{4}$ 으로 6보다 작다

— 곧 이 적분값은 $p=0$ 에서 최소가 아니다. ㄷ은 존재만 보이므로 $p > 0$ 쪽으로 잡는 것으로 충분하다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14) [정답] ⑤

[발상]

함숫값이 갈라지는 것은 k 가 세제곱수일 때뿐이다. 그 항만 따로 떼면 「남는 것은 세제곱수의 제곱합」이고, 자연수가 되는 조건은 그 합이 5의 배수인가로 좁혀진다.

[풀이]

자연수 k 에 대하여 $f(k)=\frac{1}{k}$ 이므로 $5f(k)=\frac{5}{k}$ 이다.

한편 $\sqrt[3]{k}$ 가 자연수가 되는 것은 k 가 세제곱수일 때뿐이다.

(i) k 가 세제곱수가 아닌 경우: $f(\sqrt[3]{k})=5$ 이므로

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)} = \frac{5}{\frac{5}{k}} = k$$

(ii) $k=m^3$ (m 은 자연수)인 경우:

$$f(\sqrt[3]{k})=f(m)=\frac{1}{m} \text{이므로}$$

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)} = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{5}{m^3}} = \frac{m^2}{5}$$

따라서 $M^3 \leq n < (M+1)^3$ 인 자연수 M 을 잡으면 (곧 M 은 1부터 n 까지의 세제곱수의 개수다)

$$S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)} = \left(\sum_{k=1}^n k \right) - \left(\sum_{m=1}^M m^3 \right) + \frac{1}{5} \left(\sum_{m=1}^M m^2 \right)$$

이다. 앞의 두 항 $\frac{n(n+1)}{2}$ 과 $\left\{ \frac{M(M+1)}{2} \right\}^2$ 은 언제나

정수이므로

$S(n)$ 이 자연수인 것은 $\frac{1}{5} \sum_{m=1}^M m^2$ 이 정수인 것과 같고,

그것은

$$\sum_{m=1}^M m^2 = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6}$$

이 5의 배수인 것과 같다.

이다. $n \leq 300$ 이고 $6^3 = 216$ 이며 $7^3 = 343$ 이므로

$1 \leq M \leq 6$ 이고

$$\sum_{m=1}^M m^2 = 1, 5, 14, 30, 55, 91 \quad (M=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

이므로 5의 배수인 것은 $M=2, M=4, M=5$ 일 때다.

각 경우의 n 의 개수는

$M=2: 8 \leq n \leq 26$ (19개), $M=4: 64 \leq n \leq 124$ (61개)

$M=5: 125 \leq n \leq 215$ (91개)

따라서 구하는 개수는

$$19 + 61 + 91 = 171$$

15) [정답] ④

[발상]

분모가 0이 되는 자리에서도 극한이 존재하려면 「분자가 그 근을 함께 가져야」 한다. 그러니 이 조건은 두 이차식의

근이 어떻게 겹치는가에 대한 말이고, 집합의 경계 $t = \frac{3}{2}$ 가

그 겹침이 처음 무너지는 자리다.

[풀이]

$f(x) = x^2 + bx + c$ (b, c 는 상수)라 하고 분모를

$D(x) = f(x) + f(x-t)$ 라 하면

$$D(x) = x^2 + bx + c + (x-t)^2 + b(x-t) + c$$

$$= 2x^2 + 2(b-t)x + (2c - bt + t^2)$$

이고 $D(x) = 0$ 의 판별식을 4로 나눈 값은

$$(b-t)^2 - 2(2c - bt + t^2) = b^2 - 4c - t^2$$

이다. 여기서 $\Delta = b^2 - 4c$ 라 하자.

(i) $t^2 > \Delta$ 이면 $D(x) = 0$ 인 실수가 없으므로 모든 실수 a 에서 극한이 존재한다.

(ii) $t^2 < \Delta$ 이면 $D(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖고, 그 각각에서 분자 $(2x+1)f(x)$ 도 0이 되어야 극한이 존재한다.

(iii) $t^2 = \Delta$ 이면 $D(x) = 0$ 이 중근 $x_0 = \frac{t-b}{2}$ 를 가지므로

분자가 x_0 에서 이중근을 가져야 한다.

조건에서 극한이 존재하도록 하는 양수 t 의 집합이

$$\left\{ t \mid t \geq \frac{3}{2} \right\} \text{이므로 그 경계는 } \sqrt{\Delta} = \frac{3}{2}, \text{ 곧}$$

$$\Delta = b^2 - 4c = \frac{9}{4}$$

이어야 한다. (만약 $\Delta \leq 0$ 이면 (i)에 의해 모든 양수 t 가 조건을 만족시켜 집합이 달라진다.)

이때 $t = \frac{3}{2}$ 에서 중근은

$$x_0 = \frac{t-b}{2} = \frac{3}{4} - \frac{b}{2}$$

이고, $f(x) = 0$ 의 두 근은

$$x = \frac{-b \pm \frac{3}{2}}{2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{3}{4}$$

이므로 x_0 는 f 의 두 근 중 하나다. 곧 분자 $(2x+1)f(x)$ 에서 f 가 주는 것은 x_0 에 대한 한 겹뿐이고, 나머지 한 겹은

$2x+1$ 에서 와야 한다. 따라서

$$x_0 = -\frac{1}{2}, \quad -\frac{b}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{5}{2}$$

$$\text{이고 } c = \frac{b^2 - \frac{9}{4}}{4} = \frac{\frac{25}{4} - \frac{9}{4}}{4} = 1$$

이때 $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x+2)$ 이고 분자는 $2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2(x+2)$ 이다.

실제로 $0 < t < \frac{3}{2}$ 이면

$$D\left(-\frac{1}{2}\right) = t\left(t - \frac{3}{2}\right) \neq 0, \quad D(-2) = t\left(t + \frac{3}{2}\right) \neq 0$$

이므로 D 의 두 실근은 분자의 근이 아니고 극한이 존재하지

않는다. 곧 조건의 집합이 정확히 $\left\{ t \mid t \geq \frac{3}{2} \right\}$ 이다.

따라서

$$f(2) = 4 + 2 \times \frac{5}{2} + 1 = 10$$

16) [정답] 6

[발상]

밑이 3과 9로 다르다. 「밑을 3으로 맞추면」 진수끼리의 이차방정식이 되고, 진수 조건이 두 근 중 하나를 지운다.

[풀이]

진수 조건에서 $x-3 > 0$ 이고 $2x-3 > 0$ 이므로 $x > 3$ 이다.

$$\log_9(2x-3) = \frac{\log_3(2x-3)}{\log_3 9} = \frac{1}{2} \log_3(2x-3)$$

이므로 주어진 방정식의 양변에 2를 곱하면

$$2\log_3(x-3) = \log_3(2x-3), \quad \log_3(x-3)^2 = \log_3(2x-3)$$

곧

$$(x-3)^2 = 2x-3, \quad x^2 - 8x + 12 = 0, \quad (x-2)(x-6) = 0$$

이므로 $x=2$ 또는 $x=6$

이 중 $x > 3$ 을 만족시키는 것은 $x=6$ 이다.

17) [정답] 11

[발상]

도함수를 적분하면 적분상수가 달려 온다. 「한 점의 함숫값 $f(0)=10$ 이」 그것을 정한다.

[풀이]

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (6x^2 - 2x) dx = 2x^3 - x^2 + C \quad (C \text{는}$$

적분상수)

$$\text{이고 } f(0) = C = 10 \text{ 이므로 } C = 10$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^3 - x^2 + 10 \text{ 이므로}$$

$$f(1) = 2 - 1 + 10 = 11$$

18) [정답] 38

[발상]

항마다 짝수인지 홀수인지가 다음 규칙을 고른다. 「한 항씩 실제로 따라가는 것」이 가장 빠르다 - 다섯 걸음이면 닿는다.

[풀이]

$$a_1 = 28 \text{ 이 짝수이므로 } a_2 = \frac{1}{2} \times 28 = 14$$

$$a_2 = 14 \text{ 가 짝수이므로 } a_3 = \frac{1}{2} \times 14 = 7$$

$$a_3 = 7 \text{ 이 홀수이므로 } a_4 = 2 \times 7 + 12 = 26$$

$$a_4 = 26 \text{ 이 짝수이므로 } a_5 = \frac{1}{2} \times 26 = 13$$

$$a_5 = 13 \text{ 이 홀수이므로 } a_6 = 2 \times 13 + 12 = 38$$

$$\text{따라서 } a_6 = 38$$

19) [정답] 15

[발상]

기울기가 주어졌으므로 접점이 먼저 정해진다. 「도함수가 8이 되는 x 」가 둘 나오고, 그중 y 절편이 양수인 쪽만 남는다.

[풀이]

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 2 \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$$

접점의 x 좌표를 t 라 하면 접선의 기울기가 8이므로

$$3t^2 - 6t - 1 = 8, \quad t^2 - 2t - 3 = 0, \quad (t-3)(t+1) = 0$$

$$\text{이므로 } t = 3 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \quad t = 3 \text{ 일 때 } f(3) = 27 - 27 - 3 + 2 = -1 \text{ 이므로 접선은}$$

$$y = 8(x-3) - 1 = 8x - 25$$

이고 y 절편이 -25 로 음수다.

$$(ii) \quad t = -1 \text{ 일 때 } f(-1) = -1 - 3 + 1 + 2 = -1 \text{ 이므로 접선은}$$

$$y = 8(x+1) - 1 = 8x + 7$$

이고 y 절편이 7로 양수다.

따라서 구하는 직선은 $y = 8x + 7$ 이고

$$k = 8 \times 1 + 7 = 15$$

20) [정답] 17

[발상]

두 수평선이 만드는 그림은 $x = \pi$ 에 대하여 대칭이다.

그래서 「두 점 사이의 거리가 a 하나로 적힌다」는 것이 이 문제의 뼈대이고, 넓이의 비가 그 a 를 정한다.

[풀이]

두 곡선의 교점에서 $\sin x = -k \cos x$, 곧 $\tan x = -k$ 이다.

$k > 1$ 이므로 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 해는 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 에 하나,

$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ 에 하나다.

점 A의 x 좌표를 a 라 하면 $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ 이고 $A(a, \sin a)$ 이며

$\sin a > 0$ 이다. 다른 해는 $a + \pi$ 이고

$$\sin(a + \pi) = -\sin a < 0$$

이므로 $B(a + \pi, -\sin a)$ 이다.

점 A를 지나는 수평선 $y = \sin a$ 와 곡선 $y = g(x)$ 의 교점은

$$-k \cos x = \sin a, \quad \cos x = -\frac{\sin a}{k} = \cos a$$

에서 $x = a$ 또는 $x = 2\pi - a$ 이므로 $C(2\pi - a, \sin a)$ 이다.

같은 방법으로 점 B를 지나는 수평선 $y = -\sin a$ 에 대하여

$$\cos x = \frac{\sin a}{k} = \cos(a + \pi)$$

이므로 $x = a + \pi$ 또는 $x = 2\pi - (a + \pi) = \pi - a$ 이고

$D(\pi - a, -\sin a)$ 이다.

곧 (가)는 $a + \pi$, (나)는 $\pi - a$ 이다.

선분 DB는 x 축에 평행하고

$$\overline{DB} = (a + \pi) - (\pi - a) = 2a$$

이며 점 C와 직선 $y = -\sin a$ 의 거리는 $2\sin a$ 이므로

$$(\text{삼각형 } CDB \text{의 넓이}) = \frac{1}{2} \times 2a \times 2\sin a = 2a \sin a$$

또 $O(0, 0)$, $A(a, \sin a)$, $D(\pi - a, -\sin a)$ 이므로

$$(\text{삼각형 } AOD \text{의 넓이}) = \frac{1}{2} |a \times (-\sin a) - (\pi - a) \times \sin a|$$

$$= \frac{\pi}{2} \sin a$$

이다. 넓이의 비가 14:5이므로

$$2a \sin a : \frac{\pi}{2} \sin a = 14 : 5, \quad \frac{2a}{\frac{\pi}{2}} = \frac{14}{5}, \quad a = \frac{7\pi}{10}$$

곧 (다)는 $\frac{7\pi}{10}$ 이고 이것은 $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ 를 만족시킨다.

따라서 $p(a) = a + \pi$, $q(a) = \pi - a$, $\alpha = \frac{7\pi}{10}$ 이므로

$$3 \times \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} = 3 \times \frac{\frac{7\pi}{10} + \pi}{\pi - \frac{7\pi}{10}} = 3 \times \frac{\frac{17\pi}{10}}{\frac{3\pi}{10}} = 17$$

21) [정답] 12

[발상]

절댓값은 단순근마다 도함수에 도약을 만든다.

미분가능하려면 「두 도약이 같은 자리에서 서로 지워져야」 하고, 그 요구가 곱해진 세 일차식이 중근을 갖도록 a 를 좁힌다.

[풀이]

(가)에서 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근이 둘이므로

$f(x) = (x-p)^2(x-q)$ ($p \neq q$)로 놓을 수 있다.

먼저 $g(x)$ 의 미분 불가능한 점을 찾는다. $f(x)$ 의 부호가 바뀌는 곳은 단순근 $x=q$ 한 곳뿐이고, 그 왼쪽에서 $f(x) < 0$, 오른쪽에서 $f(x) > 0$ 이므로

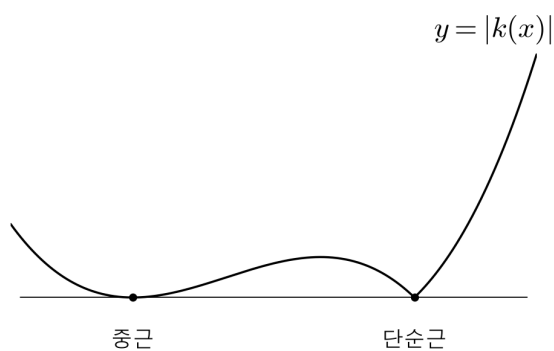
$$g'(q-) = 7f'(q), \quad g'(q+) = -f'(q)$$

이고 도함수의 도약은

$$g'(q+) - g'(q-) = -8f'(q) = -8(q-p)^2 < 0$$

이다. 중근 $x=p$ 에서는 부호가 바뀌지 않아 한쪽 식이 그대로 이어지므로 g 는 미분가능하다.

다음으로 $k(x) = (x-1)(x-a)(x-4+a)$ 라 하면 $|k(x)|$ 는 k 의 단순근에서만 미분가능하지 않고, 단순근 r 에서 도함수의 도약은 $2|k'(r)| > 0$ 이다. (중근·삼중근에서는 미분가능하다.)



그림은 그 둘이 어떻게 다른지를 보인다. 중근 자리에서는 곡선이 매끄럽게 이어지고, 단순근 자리에서만 뾰족하게 꺾인다. 곧 $|k|$ 의 미분 불가능한 점의 개수는 k 의 단순근의 개수와 같다.

함수 $h(x) = g(x) + |k(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 두 도약이 같은 점에서 서로 지워져야 한다. g 의 도약은 한 곳뿐이므로 $|k|$ 의 단순근도 정확히 한 곳이어야 하고, 그 자리가 q 여야 한다. 곧 k 의 세 근 1, a ,

$4-a$ 중 둘이 겹쳐야 한다.

(i) $a=1$ 또는 $a=3$ 일 때 $k(x) = (x-1)^2(x-3)$ 이므로 단순근은 $x=3$ 이고 $q=3$ 이다. $k'(3) = (3-1)^2 = 4$ 이므로

$$2 \times 4 = 8(q-p)^2, \quad (3-p)^2 = 1, \quad p=2 \quad \text{또는} \quad p=4$$

이때 $f(0) = (-p)^2 \times (-q) = -3p^2$ 이므로 $f(0) = -12$ 또는 $f(0) = -48$ 이다.

(ii) $a=2$ 일 때 $k(x) = (x-1)(x-2)^2$ 이므로 단순근은 $x=1$ 이고 $q=1$ 이다. $k'(1) = (1-2)^2 = 1$ 이므로

$$2 \times 1 = 8(q-p)^2, \quad (1-p)^2 = \frac{1}{4}, \quad p = \frac{1}{2} \quad \text{또는} \quad p = \frac{3}{2}$$

이때 $f(0) = -p^2$ 이므로 $f(0) = -\frac{1}{4}$ 또는 $f(0) = -\frac{9}{4}$ 이다.

세 근이 모두 같아지는 a 는 없고, 세 근이 서로 다르면 $|k|$ 의 미분 불가능한 점이 셋이라 하나밖에 없는 g 의 도약으로 다 지울 수 없다.

따라서 $f(0)$ 의 값은 $-\frac{1}{4}$, $-\frac{9}{4}$, -12 , -48 이고

$$(\text{최댓값}) \times (\text{최솟값}) = \left(-\frac{1}{4}\right) \times (-48) = 12$$

22) [정답] 97

[발상]

두 곡선이 같은 두 점을 지난다는 것은 「교점이 곧 꼭짓점」이라는 말이다. 네 점을 좌표로 구해 놓고 직사각형이 되는 조건을 걸면 밑이 정해진다.

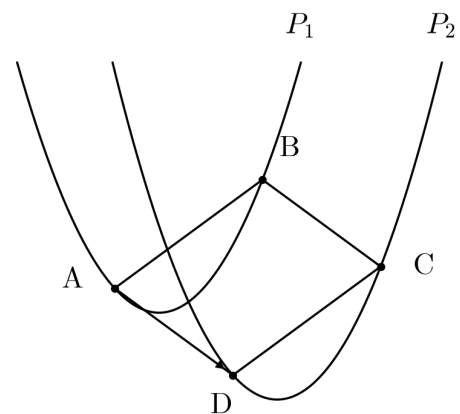
[풀이]

두 포물선을 각각 $P_1: y = 2x^2 - \frac{7}{2}x + 3$,

$P_2: y = 2x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{15}{2}$ 라 하자.

$$2(x-1)^2 - \frac{7}{2}(x-1) + 3 - 1 = 2x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{15}{2}$$

이므로 P_2 는 P_1 을 $(1, -1)$ 만큼 평행이동한 것이다.



그림에서 P_2 는 P_1 를 오른쪽 아래로 나란히 옮긴 것이고,

직사각형의 네 꼭짓점은 두 곡선에 둘씩 나뉘어 얹힌다. 곧 두 점 A, B는 P_1 위에 있고 두 점 C, D는 P_2 위에 있다.

직사각형이므로 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ 이다.

한편 포물선 P_1 위의 두 점을 잇는 현은 방향과 길이가 정해지면 하나뿐이다. 실제로 두 점의 x 좌표를 s, s' 라 하면

$$\left(2s'^2 - \frac{7}{2}s'\right) - \left(2s^2 - \frac{7}{2}s\right) = (s' - s) \left\{ 2(s + s') - \frac{7}{2} \right\}$$

이므로 $s' - s$ 와 세로 변화량이 정해지면 $s + s'$ 가 정해지고, 따라서 s 와 s' 가 정해진다.

그러므로 D, C를 $(-1, 1)$ 만큼 옮긴 두 점은 P_1 위에서

$\overrightarrow{AB}$ 와 같은 현을 이루고, 그 현은 $\overrightarrow{AB}$ 하나뿐이다. 곧

$$D = A + (1, -1), C = B + (1, -1)$$

이다. 이때 $\overrightarrow{AD} = (1, -1)$ 이고 직사각형이므로 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$, 곧 $\overrightarrow{AB}$ 의 방향은 $(1, 1)$ 이다.

$A(\alpha, a^\alpha), B(\beta, a^\beta)$ 라 하면 $a^\beta - a^\alpha = \beta - \alpha$ 이고, 두 점이 P_1 위에 있으므로 위의 식에서

$$\beta - \alpha = (\beta - \alpha) \left\{ 2(\alpha + \beta) - \frac{7}{2} \right\}$$

이다. $\beta \neq \alpha$ 이므로

$$2(\alpha + \beta) - \frac{7}{2} = 1, \quad \alpha + \beta = \frac{9}{4}$$

다음으로 점 D가 곡선 $y = \log_a \left(x - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4}$ 위에 있다는

조건을 쓴다. $D(\alpha + 1, a^\alpha - 1)$ 이므로

$$a^\alpha - 1 = \log_a \left(\alpha + \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{4}, \quad \log_a \left(\alpha + \frac{3}{4} \right) = a^\alpha - \frac{3}{4}$$

이다. 여기서 $G(x) = a^x - \frac{3}{4}$ 라 하면 위 식은

$$\alpha + \frac{3}{4} = a^{G(\alpha)}, \quad G(G(\alpha)) = \alpha$$

가 된다. $a > 1$ 이므로 G 는 증가함수이고, 증가함수가 $G(G(x)) = x$ 를 만족시키면 반드시 $G(x) = x$ 이다. (만약 $G(\alpha) > \alpha$ 이면 $G(G(\alpha)) > G(\alpha) > \alpha$ 가 되어 모순이고, 반대도 같다.) 따라서

$$a^\alpha = \alpha + \frac{3}{4}$$

이고 같은 방법으로 $a^\beta = \beta + \frac{3}{4}$ 이다. 곧 두 점 A, B는 직선

$$y = x + \frac{3}{4} \text{ 위에 있다.}$$

이 직선과 P_1 의 교점에서

$$x + \frac{3}{4} = 2x^2 - \frac{7}{2}x + 3$$

$$8x^2 - 18x + 9 = 0, \quad (4x - 3)(2x - 3) = 0$$

이므로 α 와 β 는 $\frac{3}{4}$ 와 $\frac{3}{2}$ 이다. ($\alpha + \beta = \frac{9}{4}$ 와도 맞는다.)

따라서 $a^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$ 이므로

$$a^3 = \left(a^{\frac{3}{4}} \right)^4 = \left(\frac{3}{2} \right)^4 = \frac{81}{16}$$

이고 16과 81은 서로소이므로 $p = 16, q = 81$ 이다. 그러므로

$$p + q = 16 + 81 = 97$$

23) [정답] ①

[발상]

같은 숫자가 섞여 있으면 그만큼 겹쳐 세게 된다. 「같은 것 셋의 순서를 나눈다」는 것이 이 계산의 전부다.

[풀이]

다섯 개의 숫자 중 3이 세 개로 같으므로 구하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수

$$\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

24) [정답] ④

[발상]

조건부확률의 정의를 곱셈 꼴로 되돌린다. 「여사건의 확률이 $P(A)$ 를 준다」는 것만 보면 남는 것은 두 수의 곱이다.

[풀이]

$$P(A^c) = \frac{2}{5} \text{ 이므로}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

확률의 곱셈정리에 의하여

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

25) [정답] ⑤

[발상]

전개식의 한 항만 필요하다. 「일반항의 지수를 x^2 에 맞추면」 몇 번째 항인지가 정해지고, 계수는 그 항의 이항계수와 2의 거듭제곱의 곱이다.

[풀이]

이항정리에 의하여 전개식의 일반항은

$${}_4C_r (2x^3)^{4-r} \left(\frac{1}{x^2} \right)^r = {}_4C_r \times 2^{4-r} \times x^{12-5r}$$

이다. x^2 의 항은 $12-5r=2$, 곧 $r=2$ 일 때이므로 구하는 계수는

$${}_4C_2 \times 2^2 = 6 \times 4 = 24$$

26) [정답] ②

[발상]

두 사건이 배반이 아니다. 「겹치는 자리를 한 번 빼 준다」는 덧셈정리가 그대로 답이고, 겹침은 손으로 셀 만큼 적다.

[풀이]

한 개의 주사위를 두 번 던지는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$ 사건 A 를 「 $a \leq 3$ 」인 사건, 사건 B 를 「 $a \times b$ 가 8의 배수」인 사건이라 하자.

A 는 $a=1, 2, 3$ 의 각각에 대하여 b 가 여섯 가지이므로

$$n(A) = 3 \times 6 = 18$$

사건 B 는 a 의 값에 따라 나누어 세면

$$a=2: b=4, a=4: b=2, 4, 6, a=6: b=4$$

이고 $a=1, 3, 5$ 일 때는 없으므로 (이때 $a \times b$ 가 8의 배수가 되려면 b 가 8의 배수여야 한다)

$$n(B) = 1 + 3 + 1 = 5$$

두 사건이 함께 일어나는 것은 $(a, b) = (2, 4)$ 하나뿐이므로

$$n(A \cap B) = 1$$

따라서 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{36} = \frac{18 + 5 - 1}{36} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$$

27) [정답] ③

[발상]

모평균은 알지만 표준편차를 모른다. 주어진 확률의 구간을 표준화하면 「양 끝이 σ 없이 수로 나오고」 표의 값 두 개의 차가 그 확률과 맞아떨어지는 자리에서 σ 가 정해진다.

[풀이]

$Z = \frac{X-1}{\sigma}$ 라 하면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르고

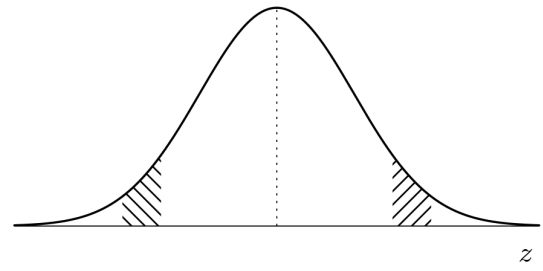
$$P\left(\frac{3}{2}\sigma \leq X \leq 2\sigma\right) = P\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sigma} \leq Z \leq 2 - \frac{1}{\sigma}\right)$$

이다. 이 구간의 길이는 $\frac{1}{2}$ 이고, 표에서 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 구간의

확률이 0.044가 되는 것은

$$P(1.5 \leq Z \leq 2) = 0.4772 - 0.4332 = 0.044$$

뿐이다. 표준정규분포는 $Z=0$ 에 대하여 대칭이므로 구간은 $1.5 \leq Z \leq 2$ 또는 $-2 \leq Z \leq -1.5$ 이다.



그림에서 두 후보 구간은 대칭축을 사이에 두고 좌우로 놓이고 넓이가 같다. 그런데 표준화한 구간의 왼쪽 끝은 $\frac{3}{2} - \frac{1}{\sigma}$ 이고 양수 σ 에 대하여 $\frac{1}{\sigma} > 0$ 이므로 그 끝은 반드시 $\frac{3}{2}$ 보다 왼쪽에 있다. 곧 오른쪽 구간은 설 수 없다.

앞엿것이면 $\frac{3}{2} - \frac{1}{\sigma} = \frac{3}{2}$ 에서 $\frac{1}{\sigma} = 0$ 이 되어 양수 σ 가 없다.

그러므로

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{\sigma} = -2, \quad \frac{1}{\sigma} = \frac{7}{2}, \quad \sigma = \frac{2}{7}$$

따라서

$$P\left(X \geq \frac{10}{7}\right) = P\left(Z \geq \frac{\frac{10}{7} - 1}{\frac{2}{7}}\right) = P(Z \geq 1.5)$$

$$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

28) [정답] ⑤

[발상]

네 번의 시행이 만드는 배열은 인접한 두 자리를 바꾸는 일의 되풀이다. 제자리로 돌아오려면 「바꾼 횟수가 짝수여야」 하고, 그래서 눈이 6인 시행이 몇 번 있었는가로 갈래가 갈린다.

[풀이]

같은 문자가 적힌 카드끼리는 겹으로 구별되지 않으므로 보이는 배열만 상태로 잡는다. 이웃한 두 자리의 문자가 같으면 바꾸어도 배열이 그대로다.

처음 배열을 $X = AAABBB$ 라 하면, 배열을 바꾸는 눈은 $k=3$ 하나뿐이고(다른 다섯은 같은 문자끼리 바꾸거나 그대로 두므로 배열이 변하지 않는다) 그때의 배열은

$$P = AABABB$$

이다. 곧 X 에서 X 로 가는 눈이 5가지, X 에서 P 로 가는 눈이 1가지다.

$P = AABABB$ 에서는 $k=1, 5, 6$ 이 배열을 그대로 두고

$k=2: Q = ABAABB, k=3: X, k=4: R = AABBAB$

이다. 또 Q 와 R 에서 P 로 가는 눈은 각각 한

가지씩이고(각각 $k=2$ 와 $k=4$), Q 나 R 에서 X 로 한 번에

갈 수는 없다.

따라서 4번의 시행 뒤 배열이 X 가 되는 상태의 열과 그 경우의 수는 다음과 같다.

$$X \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow X: 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

$$X \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow P \rightarrow X: 5 \times 5 \times 1 \times 1 = 25$$

$$X \rightarrow X \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow X: 5 \times 1 \times 1 \times 5 = 25$$

$$X \rightarrow X \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow X: 5 \times 1 \times 3 \times 1 = 15$$

$$X \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow X: 1 \times 1 \times 5 \times 5 = 25$$

$$X \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow P \rightarrow X: 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$X \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow X: 1 \times 3 \times 1 \times 5 = 15$$

$$X \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow X: 1 \times 3 \times 3 \times 1 = 9$$

$$X \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow X: 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$X \rightarrow P \rightarrow R \rightarrow P \rightarrow X: 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

이므로 그 경우의 수는

$$625 + 25 + 25 + 15 + 25 + 1 + 15 + 9 + 1 + 1 = 742$$

이 가운데 3번째 시행에서 나온 눈이 6인 것을 센다. 눈이 6이면 배열이 그대로이므로 셋째 걸음이 제자리인 열만 남고, 그 걸음의 눈은 6 하나로 못 박힌다.

$$X \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow X: 5 \times 5 \times 1 \times 5 = 125$$

$$X \rightarrow X \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow X: 5 \times 1 \times 1 \times 1 = 5$$

$$X \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow X: 1 \times 1 \times 1 \times 5 = 5$$

$$X \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow X: 1 \times 3 \times 1 \times 1 = 3$$

이므로 그 경우의 수는 $125 + 5 + 5 + 3 = 138$

따라서 구하는 조건부확률은

$$\frac{138}{742} = \frac{69}{371}$$

29) [정답] 190

[발상]

먼저 합의 조건만으로 순서쌍을 세고 부등식 조건을 어기는 것을 뺀다. 「어기는 자리는 아주 적다」 - 두 부등식은 한쪽 끝에서만 무너지므로 예외를 손으로 셀 수 있다.

[풀이]

먼저 (가)만 만족시키는 순서쌍의 개수를 센다.

$a+b+c+d=14$ 를 만족시키는 자연수 순서쌍의 개수는

$${}_{13}C_3 = 286$$

이제 (나)를 어기는 것을 뺀다. (나)를 어기는 것은

$10a < d$ 이거나 $c \geq d^2$ 인 경우다.

(i) $10a < d$ 인 경우: $a \geq 1$ 이므로 $d \geq 11$ 이고,

$b, c \geq 1$ 이므로 $d \leq 14 - 3 = 11$ 이다. 따라서 $d = 11$ 이고

$a = b = c = 1$ 인 $(1, 1, 1, 11)$ 하나뿐이다.

(ii) $c \geq d^2$ 인 경우: d 의 값에 따라 나눈다.

$d = 1$ 이면 $c \geq 1$ 은 언제나 참이므로 $a+b+c=13$ 을

만족시키는 자연수 순서쌍 전부가 해당하고 그 개수는

$${}_{12}C_2 = 66$$

$d = 2$ 이면 $c \geq 4$ 이고 $a+b+c=12$ 이므로 $c' = c-3$ 으로

놓으면 $a+b+c'=9$ 에서 ${}_8C_2 = 28$

$d = 3$ 이면 $c \geq 9$ 이고 $a+b+c=11$ 에서 $a+b \geq 2$ 이므로

$c \leq 9$ 이다. 곧 $c = 9$, $a = b = 1$ 인 하나뿐이다.

$d \geq 4$ 이면 $c \geq 16$ 인데 $c \leq 14 - 1 - 1 - 4 = 8$ 이므로 없다.

따라서 (ii)는 $66 + 28 + 1 = 95$ 가지다.

(i)의 $(1, 1, 1, 11)$ 은 $c = 1$, $d^2 = 121$ 이라 $c \geq d^2$ 를

만족시키지 않으므로 두 경우는 겹치지 않는다.

그러므로 구하는 개수는

$$286 - (1 + 95) = 286 - 96 = 190$$

30) [정답] 170

[발상]

평균을 다루면 분모가 따라다닌다. 「합으로 바꿔 놓으면」 구하는 합이 그 합의 제곱의 기댓값이 되고, 분산과 평균의 관계 한 줄로 끝난다.

[풀이]

꺼낸 5개의 수의 합을 S 라 하면 $\bar{X} = \frac{S}{5}$ 이므로

$$P\left(\bar{X} = \frac{k}{5}\right) = P(S = k)$$

이고 S 가 가질 수 있는 값은 $0, 1, \dots, 10$ 이다. $k = 0$ 인 항은

$k^2 = 0$ 이라 더해도 값이 그대로이므로

$$a = \left(\sum_{k=1}^{10} k^2 P(S = k)\right) = \left(\sum_{k=0}^{10} k^2 P(S = k)\right) = E(S^2)$$

한 번의 시행에서 나오는 수를 Y 라 하면

$$E(Y) = \frac{0+1+2}{3} = 1, \quad E(Y^2) = \frac{0+1+4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\text{이므로 } V(Y) = \frac{5}{3} - 1^2 = \frac{2}{3}$$

복원추출이므로 다섯 번의 시행은 서로 독립이고

$$E(S) = 5 \times 1 = 5, \quad V(S) = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

따라서

$$a = E(S^2) = V(S) + \{E(S)\}^2 = \frac{10}{3} + 25 = \frac{85}{3}$$

이므로

$$6 \times a = 6 \times \frac{85}{3} = 170$$

31) [정답] ④

[발상]

 $x \rightarrow 0$ 에서 $\ln(2x+1)$ 은 $2x$ 와 같은 크기로 작아진다.「분모를 $2x$ 로 맞춰 놓으면」 아는 극한 하나만 남는다.

[풀이]

자연로그의 극한에서

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

이므로 $t = 2x$ 로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{2x} = 1$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \times \frac{2x}{\ln(2x+1)} \right) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

32) [정답] ①

[발상]

다항식과 지수함수의 곱이다. 「다항식 쪽을 미분해 없앤다」는 방향으로 부분적분을 한 번 쓰면 남는 적분이 지수함수뿐이다.

[풀이]

 $u = 3x+1$, $v' = e^x$ 으로 놓으면 $u' = 3$, $v = e^x$ 이므로

부분적분법에 의하여

$$\int_0^1 (3x+1)e^x dx = [(3x+1)e^x]_0^1 - \int_0^1 3e^x dx$$

$$= (4e-1) - 3[e^x]_0^1$$

$$= (4e-1) - 3(e-1)$$

$$= e+2$$

33) [정답] ③

[발상]

등비수열이 수렴하는 공비의 범위는 $-1 < r \leq 1$ 이다. 「그 범위를 k 에 대한 부등식으로 옮기면」 정수의 개수를 세는 문제가 된다.

[풀이]

등비수열 $\{r^n\}$ 이 수렴할 조건은 $-1 < r \leq 1$ 이므로

$$-1 < \frac{k^2-20}{16} \leq 1$$

이어야 한다. 각 변에 16을 곱하면

$$-16 < k^2 - 20 \leq 16, \quad 4 < k^2 \leq 36$$

이고 k 가 정수이므로 $2 < |k| \leq 6$, 곧

$$k = \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$$

따라서 구하는 k 의 개수는 8이다.

34) [정답] ②

[발상]

접선은 접점에서 곡선과 만나고 그 밖에서는 한쪽에 있다.

「위아래를 먼저 정해 두면」 넓이는 차를 적분한 것 하나로 적힌다.

[풀이]

$$y = \frac{2}{x^2+x} \text{에서}$$

$$y' = -\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}$$

이므로 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{2 \times 3}{2^2} = -\frac{3}{2}$$

이고 접선 l 의 방정식은

$$y = -\frac{3}{2}(x-1) + 1 = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

이다. $1 < x \leq 2$ 에서 곡선이 접선보다 위에 있으므로 (실제로 $x=2$ 에서 곡선은 $\frac{1}{3}$, 접선은 $-\frac{1}{2}$ 이다) 구하는 넓이는

$$S = \int_1^2 \left\{ \frac{2}{x^2+x} - \left(-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \right) \right\} dx$$

이다. 첫째 항은 부분분수로 갈라

$$\int_1^2 \frac{2}{x(x+1)} dx = 2 \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = 2 \left[\ln \frac{x}{x+1} \right]_1^2$$

$$= 2 \left(\ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} \right) = 2 \ln \frac{4}{3}$$

이고 둘째 항은

$$\int_1^2 \left(-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \right) dx = \left[-\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x \right]_1^2 = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$$

이다. 따라서

$$S = 2 \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{4}$$

35) [정답] ⑤

[발상]

역함수를 직접 구하지 않는다. 「 $g(f(t)) = t^2$ 를 t 로

미분하면」 도함수끼리의 관계가 나오고, 필요한 것은

 $f(1) = 0$ 이 되는 자리에서의 값뿐이다.

[풀이]

$f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$ 에서

$$f'(x) = \frac{3(\ln x)^2}{x} - \frac{3}{x} = \frac{3}{x} \{(\ln x)^2 - 1\}$$

이므로 $f(1) = 0$ 이고 $f'(1) = -3$ 이다.

합성함수의 미분법에 의하여

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x), \quad h'(1) = g'(0) \times (-3)$$

이므로 $g'(0)$ 을 구하면 된다.

주어진 등식 $g(f(t)) = t^2$ 의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$g'(f(t))f'(t) = 2t, \quad g'(f(t)) = \frac{2t}{f'(t)}$$

이다. 여기서 $f(t) = 0$ 이 되는 $t \geq e$ 를 찾는다. $u = \ln t$ 라 하면

$$u^3 - 3u = u(u^2 - 3) = 0, \quad u = 0 \quad \text{또는} \quad u = \pm \sqrt{3}$$

이고 $t \geq e$ 에서 $u \geq 1$ 이므로 $u = \sqrt{3}$, 곧 $t = e^{\sqrt{3}}$ 이다.

이때

$$f'(e^{\sqrt{3}}) = \frac{3}{e^{\sqrt{3}}} (3 - 1) = \frac{6}{e^{\sqrt{3}}}$$

이므로

$$g'(0) = \frac{2e^{\sqrt{3}}}{\frac{6}{e^{\sqrt{3}}}} = \frac{e^{2\sqrt{3}}}{3}$$

따라서

$$h'(1) = \frac{e^{2\sqrt{3}}}{3} \times (-3) = -e^{2\sqrt{3}}$$

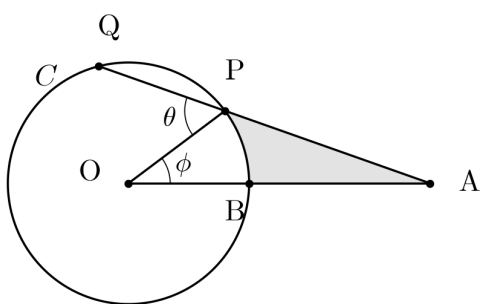
36) [정답] ④

[발상]

넓이와 각이 각각 다른 문자로 적혀 있지만 움직이는 것은 하나뿐이다. 「직선의 방향각 하나를 매개변수로 잡으면」 넓이도 각도 그 문자의 함수가 되고, 변화율은 두 도함수의 비다.

[풀이]

$\phi = \angle AOP$, $\theta = \angle OPQ$ 라 하자. 움직이는 것은 직선의 방향 하나뿐이므로 t 도 θ 도 ϕ 의 함수다.



그림에서 넓이 t 의 영역은 삼각형 OAP 안에서 부채꼴

OBP를 덜어낸 자리이고, 방금 이름 붙인 두 각 ϕ 와 θ 가 각각 O와 P에 얹혀 있다.

먼저 그 넓이를 ϕ 로 적으면

$$t = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OP} \times \sin \phi - \frac{1}{2} \times 2^2 \times \phi = 5 \sin \phi - 2\phi$$

다음으로 두 각의 관계를 얻는다. 점 P가 A와 Q 사이에

있으므로 $\angle OPA = \pi - \theta$ 이고, 삼각형 OAP의 세 각의 합에서

$$\angle OAP = \pi - \phi - (\pi - \theta) = \theta - \phi$$

이다. 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{OP}}{\sin(\angle OAP)} = \frac{\overline{OA}}{\sin(\angle OPA)}, \quad \frac{2}{\sin(\theta - \phi)} = \frac{5}{\sin \theta}$$

곧

$$5 \sin(\theta - \phi) = 2 \sin \theta$$

이다. 이 식의 양변을 ϕ 에 대하여 미분하면

$$5 \cos(\theta - \phi) \left(\frac{d\theta}{d\phi} - 1 \right) = 2 \cos \theta \times \frac{d\theta}{d\phi}$$

이므로

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{5 \cos(\theta - \phi)}{5 \cos(\theta - \phi) - 2 \cos \theta}$$

이다. 이제 $\tan \theta = \frac{3}{2}$ 인 자리의 값을 넣는다.

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

이고 $5 \sin(\theta - \phi) = 2 \sin \theta$ 에서

$$\sin(\theta - \phi) = \frac{6}{5\sqrt{13}}, \quad \cos(\theta - \phi) = \sqrt{1 - \frac{36}{325}} = \frac{17}{5\sqrt{13}}$$

이다. 따라서

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\frac{17}{5\sqrt{13}}}{\frac{17}{5\sqrt{13}} - \frac{4}{\sqrt{13}}} = \frac{17}{13}$$

또

$$\sin \phi = \sin \theta \cos(\theta - \phi) - \cos \theta \sin(\theta - \phi) = \frac{51 - 12}{65} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \phi = \cos \theta \cos(\theta - \phi) + \sin \theta \sin(\theta - \phi) = \frac{34 + 18}{65} = \frac{4}{5}$$

이므로

$$\frac{dt}{d\phi} = 5 \cos \phi - 2 = 5 \times \frac{4}{5} - 2 = 2$$

그러므로

$$f'(k) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{d\theta}{d\phi}}{\frac{dt}{d\phi}} = \frac{\frac{17}{13}}{2} = \frac{17}{26}$$

37) [정답] 81

[발상]

절댓값이 10보다 큰지 작은지에 따라 항의 꼴이 바뀐다.
 급수가 수렴하려면 공비의 절댓값이 1보다 작아야 하므로
 「큰 항은 앞쪽 몇 개뿐」이고, 어디서 갈라지는가가 갈래를
 몇 개 안 남긴다.

[풀이]

먼저 급수가 수렴하려면 공비의 절댓값이 1보다 작아야
 한다. 공비를 r 라 하면 $|r| \geq 1$ 일 때 $|a_n|$ 이 줄어들지 않아
 b_n 이 0으로 가지 않기 때문이다. 또 $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ 이므로
 $r < 0$ 이고 따라서
 $-1 < r < 0$
 이다. 이때 $|a_n|$ 은 줄어들기만 하므로 $|a_n| < 10$ 이 한 번
 성립하면 그 뒤로 계속 성립한다. 처음으로 $|a_n| < 10$ 이 되는
 번호를 m 이라 하자.

(i) $m=1$ 또는 $m=2$ 인 경우: b_2 와 b_3 이 모두
 제곱꼴이므로

$$(a_1^2 r^2)^2 = 36a_1^2 r^4, \quad a_1^2 = 36, \quad a_1 = 6$$

이다. $m=2$ 이면 $|a_1| \geq 10$ 이어야 하는데 $a_1 = 6$ 이라
 어긋난다. $m=1$ 이면 모든 항이 제곱꼴이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{a_1^2}{1-r^2} = \frac{36}{1-r^2} = 12$$

에서 $r^2 = -2$ 가 되어 실수 r 가 없다.

(ii) $m=3$ 인 경우: $|a_1| \geq 10$, $|a_2| \geq 10$, $|a_3| < 10$ 이므로

$$b_1 = a_1 - a_1 = 0, \quad b_2 = a_2 - a_1 = a_1(r-1), \quad b_n = a_n^2 \quad (n \geq 3)$$

이다. (가)에서

$$a_1^2(r-1)^2 = 36a_1^2 r^4, \quad (1-r)^2 = 36r^4$$

이고 $r < 0$ 이므로 $1-r = 6r^2$, 곧

$$6r^2 + r - 1 = 0, \quad (3r-1)(2r+1) = 0$$

에서 $r = -\frac{1}{2}$ 이다.

(나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 0 + a_1(r-1) + \frac{a_1^2 r^4}{1-r^2} = -\frac{3}{2}a_1 + \frac{a_1^2}{12} = 12$$

이므로

$$a_1^2 - 18a_1 - 144 = 0, \quad (a_1 - 24)(a_1 + 6) = 0$$

이고 $a_1 > 0$ 이므로 $a_1 = 24$ 이다. 이때 $|a_1| = 24$, $|a_2| = 12$,
 $|a_3| = 6$ 이라 가정과 맞는다.

(iii) $m \geq 4$ 인 경우: $b_3 = a_3 - a_1 = a_1(r^2 - 1)$ 이므로 (가)에서

$$a_1^2(r-1)^2 = 36a_1(r^2 - 1), \quad a_1(r-1) = 36(r+1)$$

인데 $r-1 < 0$ 이고 $a_1 > 0$ 이므로 $r+1 < 0$, 곧 $r < -1$ 이

되어 $-1 < r < 0$ 과 어긋난다.

따라서 $a_1 = 24$, $r = -\frac{1}{2}$ 이고

$$\begin{aligned} 36 \times a_4 \times a_6 &= 36 \times a_1 r^3 \times a_1 r^5 = 36a_1^2 r^8 \\ &= 36 \times 576 \times \frac{1}{256} = 81 \end{aligned}$$

38) [정답] 49

[발상]

두 적분이 같은 곡선의 안쪽과 바깥쪽 넓이다. 「역함수의
 적분을 직사각형에서 빼는 꼴」로 바꾸면 남은 적분이 서로
 지워지고 상수만 남는다.

[풀이]

먼저 필요한 함숫값을 구한다.

$$f(0) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \quad f(1) = 2^{2-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$f(2) = 2^{4+\frac{1}{2}} = 16\sqrt{2}, \quad f(3) = 2^{6-\frac{1}{2}} = 32\sqrt{2}$$

첫째 적분은 역함수의 적분이다. g 가 f 의 역함수이므로

$$\int_{f(1)}^{f(3)} g(x) dx = 3f(3) - 1 \times f(1) - \int_1^3 f(x) dx$$

$$= 3 \times 32\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \int_1^3 f(x) dx = 94\sqrt{2} - \int_1^3 f(x) dx$$

둘째 적분은 $x = f(u)$ 로 치환한다. 이때 $g(x) = u$ 이고
 $g'(x) dx = du$ 이며 $x = f(0)$ 일 때 $u = 0$, $x = f(2)$ 일 때
 $u = 2$ 이므로

$$\int_{f(0)}^{f(2)} \frac{2^{4g(x)} g'(x)}{x} dx = \int_0^2 \frac{2^{4u}}{f(u)} du$$

이고

$$\frac{2^{4u}}{f(u)} = 2^{4u-2u-\frac{1}{2}\cos\pi u} = 2^{2u-\frac{1}{2}\cos\pi u}$$

이다. 한편 $x = u+1$ 로 놓으면 $\cos\pi(u+1) = -\cos\pi u$ 이므로

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_0^2 2^{2u+2-\frac{1}{2}\cos\pi u} du = 4 \int_0^2 2^{2u-\frac{1}{2}\cos\pi u} du$$

곧 둘째 적분은 $\frac{1}{4} \int_1^3 f(x) dx$ 와 같다. 따라서

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} \int_{f(1)}^{f(3)} g(x) dx + \int_{f(0)}^{f(2)} \frac{2^{4g(x)} g'(x)}{x} dx \\ &= \frac{1}{4} \left(94\sqrt{2} - \int_1^3 f(x) dx \right) + \frac{1}{4} \int_1^3 f(x) dx \\ &= \frac{1}{4} \times 94\sqrt{2} = \frac{47}{2} \sqrt{2} \end{aligned}$$

이므로 $p=2$, $q=47$ 이고 (두 수는 서로소다)

$$p+q = 2+47 = 49$$

39) [정답] ①

[발상]

성분끼리 계산한다. 「모든 성분의 합」이라는 말은 두 좌표를 더하라는 뜻이므로 일차방정식 하나가 된다.

[풀이]

$$2\vec{a} + \vec{b} = 2(k, 2) + (k, 3) = (2k + k, 4 + 3) = (3k, 7)$$

이므로 모든 성분의 합은 $3k + 7$

이다. $3k + 7 = 10$ 에서

$$k = 1$$

40) [정답] ②

[발상]

내분점은 좌표마다 따로 계산된다. 「세 좌표가 세 방정식」을 주고, 그중 두 개만 있으면 두 미지수가 정해진다.

[풀이]

선분 AB를 3:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 6 + 2 \times a}{3 + 2}, \frac{3 \times b + 2 \times (-4)}{3 + 2}, \frac{3 \times 5 + 2 \times 0}{3 + 2} \right)$$

$$= \left(\frac{2a + 18}{5}, \frac{3b - 8}{5}, 3 \right)$$

이다. 이것이 $(4, -1, 3)$ 이므로

$$\frac{2a + 18}{5} = 4, \quad \frac{3b - 8}{5} = -1$$

에서 $a = 1, b = 1$ 이다.

따라서 $a + b = 2$

41) [정답] ④

[발상]

단축의 길이가 짧은 반지름을 곧바로 준다. 「지나는 점을 방정식에 넣으면」 긴 반지름이 정해지고, 초점거리는 두 반지름의 제곱의 차다.

[풀이]

두 초점이 x 축 위에 있으므로 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

이라 하면 단축의 길이가 6이므로 $2b = 6$, 곧 $b = 3$ 이다.

이 타원이 점 $(4, \sqrt{5})$ 를 지나므로

$$\frac{16}{a^2} + \frac{5}{9} = 1, \quad \frac{16}{a^2} = \frac{4}{9}, \quad a^2 = 36$$

이다. 따라서

$$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 9 = 27, \quad c = 3\sqrt{3}$$

이므로

$$\overline{FF'} = 2c = 6\sqrt{3}$$

42) [정답] ⑤

[발상]

두 밑면은 평행하고 높이가 3이다. $\overline{BC} = 3$ 은 「C가 B 바로 위」라는 뜻이고, 그래서 좌표를 세울 수 있다.

[풀이]

아래 밑면의 중심을 원점으로 하고 위 밑면이 $z = 3$ 에 놓이도록 좌표공간을 잡는다. 밑면의 반지름이 3이므로

$$A(-3, 0, 0), \quad B(3, 0, 0)$$

이라 할 수 있다. 점 C는 위 밑면의 둘레 위의 점이므로

$$C(3\cos\gamma, 3\sin\gamma, 3) \text{이라 하면}$$

$$\overline{BC}^2 = (3\cos\gamma - 3)^2 + 9\sin^2\gamma + 9 = 27 - 18\cos\gamma$$

이고 이것이 9이므로 $\cos\gamma = 1$, 곧

$$C(3, 0, 3)$$

이다. 곧 C는 B의 바로 위에 있다.

점 D를 $D(3\cos\delta, 3\sin\delta, 3)$ 이라 하면

$$\overline{CD}^2 = 9(\cos\delta - 1)^2 + 9\sin^2\delta = 18(1 - \cos\delta) = 24$$

에서 $\cos\delta = -\frac{1}{3}$ 이고 $|\sin\delta| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이므로

$$D(-1, \pm 2\sqrt{2}, 3)$$

이다. 선분 AB는 x 축 위에 있고 길이가 6이며, 점 D에서 x 축까지의 거리는

$$\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{8 + 9} = \sqrt{17}$$

이다. 따라서 삼각형 ABD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{17} = 3\sqrt{17}$$

43) [정답] ③

[발상]

포물선 위의 점에서 초점까지의 거리는 준선까지의 거리와 같다. 「그 성질이 점의 x 좌표를 곧바로 준다」는 것이 출발점이고, 접선과 법선은 그 뒤 계산이다.

[풀이]

포물선 $y^2 = 4px$ 의 초점을 $F(p, 0)$ 이라 하면 준선은

$x = -p$ 이다. 포물선 위의 점에서 초점까지의 거리는

준선까지의 거리와 같으므로, 점 A의 x 좌표를 x_1 이라 하면

$$x_1 + p = 3p, \quad x_1 = 2p$$

이고 제1사분면의 점이므로

$$y_1^2 = 4p \times 2p = 8p^2, \quad y_1 = 2\sqrt{2}p$$

곧 $A(2p, 2\sqrt{2}p)$ 이다.

포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선은

$$yy_1 = 2p(x + x_1) \text{ 이므로}$$

$$2\sqrt{2}py = 2p(x + 2p), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + 2p)$$

이고 $x=0$ 일 때 $y = \sqrt{2}p$ 이므로 $B(0, \sqrt{2}p)$ 이다.

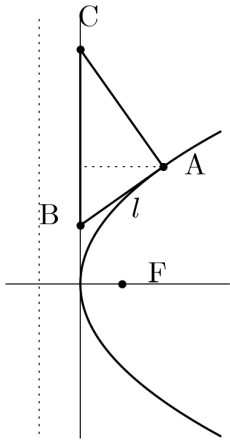
직선 l 의 기울기가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 이것과 수직인 직선의

기울기는 $-\sqrt{2}$ 이고, 점 A 를 지나는 그 직선은

$$y - 2\sqrt{2}p = -\sqrt{2}(x - 2p)$$

이다. $x=0$ 일 때 $y = 2\sqrt{2}p + 2\sqrt{2}p = 4\sqrt{2}p$ 이므로

$C(0, 4\sqrt{2}p)$ 이다.



그림에서 세 점이 자리를 잡았다. B와 C가 모두 y 축 위에 있으므로 삼각형 ACB의 밑변은 선분 BC이고 높이는 점 A에서 y 축까지의 거리다. 밑변은

$$\overline{BC} = 4\sqrt{2}p - \sqrt{2}p = 3\sqrt{2}p$$

이고 높이는 $2p$ 이므로 삼각형 ACB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2}p \times 2p = 3\sqrt{2}p^2$$

이다. 이것을 $16\sqrt{2}$ 이므로

$$p^2 = \frac{16}{3}, \quad p = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

44) [정답] ②

[발상]

네 점이 모두 구 위에 있고 다섯 변의 길이가 같다.

「대칭평면을 잡아 좌표를 세우면」 평행 조건이 한 문자를 정하고, 정사영의 넓이는 두 평면이 이루는 각의 코사인을 곱한 것이다.

[풀이]

(나)에서 삼각형 ABC와 삼각형 DBC는 변 BC를 공유하는

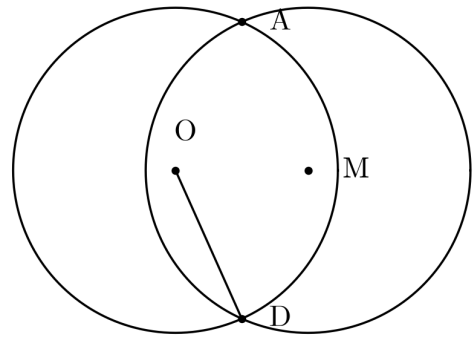
두 정삼각형이다. 그 한 변의 길이를 s 라 하자.

두 점 A, D는 선분 BC의 수직이등분면 위에 있고, 구의 중심 O도 그 면 위에 있다. 그 면을 $y=0$ 으로 잡고 BC가 y 축과 평행하도록, 또 선분 BC의 중점 M이 x 축 위에 오도록 좌표공간을 잡으면

$$B\left(m, -\frac{s}{2}, 0\right), \quad C\left(m, \frac{s}{2}, 0\right), \quad M(m, 0, 0)$$

이라 할 수 있다. 점 A와 D는 $y=0$ 위에 있고

$$\overline{AM} = \overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2}s \text{ 이다.}$$



그림은 그 평면 $y=0$ 을 오려 낸 것이다. 두 점 B와 C는 이 평면 밖에 있고 그 중점 M만 평면 위에 있다 - 남은 계산은 모두 이 평면 안에서 벌어진다.

이제 (가)를 쓴다. 삼각형 ABC의 법선은 BC에 수직이므로 $y=0$ 위에 있고, 그 면 안에서 $\overrightarrow{AM} = (m - x_A, 0, -z_A)$ 에 수직인 벡터를 잡으면

$$\vec{n} = (z_A, 0, m - x_A)$$

이다. 직선 OD가 평면 ABC와 평행하려면 $\overrightarrow{OD} \cdot \vec{n} = 0$ 이어야 한다.

한편 점 A와 D는 $y=0$ 위에서 「중심 M, 반지름 $\frac{\sqrt{3}}{2}s$ 인 원」과 「중심 O, 반지름 3인 원」의 두 교점이므로 직선 OM에 대하여 서로 대칭이다. 곧 $D(x_A, 0, -z_A)$ 이다.

그러므로

$$\overrightarrow{OD} \cdot \vec{n} = x_A z_A - z_A(m - x_A) = z_A(2x_A - m) = 0$$

이고 $z_A \neq 0$ 이므로

$$m = 2x_A$$

이다. 이제 세 식

$$x_A^2 + z_A^2 = 9, \quad m^2 + \frac{s^2}{4} = 9, \quad (x_A - m)^2 + z_A^2 = \frac{3}{4}s^2$$

에 $m = 2x_A$ 를 넣으면 셋째 식의 좌변이 $x_A^2 + z_A^2 = 9$ 가 되어 $\frac{3}{4}s^2 = 9, \quad s^2 = 12$

이고 둘째 식에서 $m^2 = 9 - 3 = 6$, 곧 $m = \sqrt{6}$ 이다. 따라서

$$x_A = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad z_A^2 = 9 - \frac{3}{2} = \frac{15}{2}, \quad z_A = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

이고

$$A\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, \frac{\sqrt{30}}{2}\right), B(\sqrt{6}, -\sqrt{3}, 0), C(\sqrt{6}, \sqrt{3}, 0)$$

이다. 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \frac{1}{2}\sqrt{72} = 3\sqrt{2}$$

이고, 두 평면 OAB와 OAC가 이루는 각을 θ 라 하면 공통인 모서리 OA에 수직인 두 벡터

$$\vec{u} = \overrightarrow{OB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \vec{v} = \overrightarrow{OC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$$

에 대하여 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2, |\vec{u}| = |\vec{v}| = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$\cos\theta = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

이다. 정사영의 넓이는 원래 넓이에 $\cos\theta$ 를 곱한 것이므로

$$3\sqrt{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

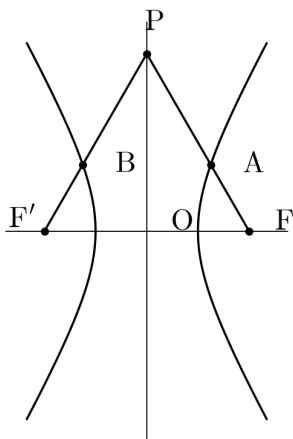
45) [정답] 60

[발상]

두 점이 y 축에 대하여 대칭이라 「쌍곡선의 정의가 두 선분의 차를 상수로 묶는다」. 타원의 정의를 함께 쓰면 길이들이 한 문자로 정리되고, 각의 이등분 조건이 남은 자유도를 없앤다.

[풀이]

쌍곡선에서 $a=4$ 이고 점 P가 y 축 위에 있으므로 그림 전체가 y 축에 대하여 대칭이다. 곧 점 B는 점 A의 y 축 대칭점이고



그림은 그 대칭을 엮은 것이다. 점 A는 선분 PF 위에, 점 B는 선분 PF' 위에 있고 두 점은 y 축을 사이에 두고 서로 옮겨 놓은 자리다. 그러므로

$$\overline{BF} = \overline{AF'}, \overline{BP} = \overline{AP}$$

이다. 타원이 두 점 F, P를 지나므로

$$\overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AP} + \overline{BP}, \overline{AF} + \overline{AF'} = 2\overline{AP}$$

이고, 점 A가 쌍곡선의 오른쪽 가지 위에 있으므로

$$\overline{AF'} - \overline{AF} = 2a = 8 \text{ 이다. 두 식에서}$$

$$\overline{AP} = \overline{AF} + 4 \dots\dots \textcircled{1}$$

다음으로 각 조건을 쓴다. 점 A가 선분 PF 위에 있으므로 반직선 PA는 반직선 PF와 같고, 직선 PC는 x 축에 평행하다. $\overline{PF}$ 가 y 축의 아래 방향과 이루는 각을 ω 라 하면 대칭성에서

$$\angle APF' = \angle FPF' = 2\omega, \angle APC = \angle FPC = \frac{\pi}{2} - \omega$$

이므로 $2\omega = \frac{\pi}{2} - \omega$, 곧 $\omega = \frac{\pi}{6}$ 이다. 따라서

$$\tan\omega = \frac{c}{p} = \frac{1}{\sqrt{3}}, p = \sqrt{3}c$$

이고

$$\overline{PF} = \sqrt{c^2 + p^2} = \sqrt{4c^2} = 2c$$

이다. 점 A가 선분 PF 위에 있으므로 $\overline{AP} + \overline{AF} = 2c$ 이고,

①과 함께 풀면

$$\overline{AP} = c + 2, \overline{AF} = c - 2$$

이다. 한편 쌍곡선의 오른쪽 가지 위의 점에서 초점 F까지의

거리는 이심률 $e = \frac{c}{a}$ 에 대하여 $\overline{AF} = ex_A - a$ 이므로

$$c - 2 = \frac{c}{4}x_A - 4, x_A = \frac{4(c+2)}{c}$$

이다. 점 A는 선분 PF를 $t:1-t$ 로 내분하는 점이라 하면

$$x_A = ct \text{ 이고 } \overline{AP} = t \times 2c \text{ 이므로}$$

$$t = \frac{4(c+2)}{c^2}, \overline{AP} = \frac{8(c+2)}{c} = c + 2$$

에서 $c=8$ 이다. 따라서

$$b^2 = c^2 - 16 = 48, p = 8\sqrt{3}, x_A = 5, y_A = 8\sqrt{3}\left(1 - \frac{5}{8}\right) = 3\sqrt{3}$$

이고 $A(5, 3\sqrt{3}), P(0, 8\sqrt{3}), F'(-8, 0)$ 이다.

직선 AF'은 두 점 $(-8, 0)$ 과 $(5, 3\sqrt{3})$ 을 지나므로

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{13}(x+8) \text{ 이고, } y = 8\sqrt{3} \text{ 을 넣으면}$$

$$x+8 = \frac{13 \times 8}{3}, x = \frac{80}{3}$$

이므로 $C\left(\frac{80}{3}, 8\sqrt{3}\right)$ 이다. 따라서

$$\overline{AP} = 10, \overline{PC} = \frac{80}{3}, \overline{CA} = \sqrt{\left(\frac{80}{3} - 5\right)^2 + (5\sqrt{3})^2} = \frac{70}{3}$$

이고 삼각형 ACP의 둘레의 길이는

$$10 + \frac{80}{3} + \frac{70}{3} = 10 + 50 = 60$$

46) [정답] 457

[발상]

두 내적이 0이라는 것은 「점이 두 원 위에 있다」는

뜻이다. 지름이 정해진 두 원의 교점이 곧 구하는 점이므로,

먼저 사다리꼴을 좌표로 세운다.

[풀이]

(가)에서 두 밑각이 같고 두 대각선 쪽 변의 길이가 같으므로 $\overline{AB}$ 와 $\overline{DC}$ 가 평행하다. $A(0,0)$, $B(24,0)$ 으로 좌표를 잡고 $\theta = \angle BAD = \angle ABC$ 라 하면

$$D(13\sqrt{2}\cos\theta, 13\sqrt{2}\sin\theta), C(24-13\sqrt{2}\cos\theta, 13\sqrt{2}\sin\theta)$$

이다. 이때

$$\overrightarrow{AB} = (24, 0), \overrightarrow{DC} = (24 - 26\sqrt{2}\cos\theta, 0)$$

$$\overrightarrow{AD} = 13\sqrt{2}(\cos\theta, \sin\theta), \overrightarrow{BC} = 13\sqrt{2}(-\cos\theta, \sin\theta)$$

이므로 (나)는

$$24(24 - 26\sqrt{2}\cos\theta) = 338(\sin^2\theta - \cos^2\theta) = 338(1 - 2\cos^2\theta)$$

곧

$$676\cos^2\theta - 624\sqrt{2}\cos\theta + 238 = 0$$

이고 양변을 2로 나누면

$$338\cos^2\theta - 312\sqrt{2}\cos\theta + 119 = 0$$

이다. 이 이차방정식을 풀면

$$\cos\theta = \frac{312\sqrt{2} \pm 130\sqrt{2}}{676} = \frac{17\sqrt{2}}{26} \text{ 또는 } \frac{7\sqrt{2}}{26}$$

이다. 앞엿것이면 $26\sqrt{2}\cos\theta = 34$ 이라 $\overrightarrow{DC} = (-10, 0)$ 이 되어 $\overrightarrow{AB}$ 와 방향이 반대다 - 그러면 네 점을 A, B, C, D 차례로 이은 도형이 사다리꼴이 되지 않는다. 그러므로

$$\cos\theta = \frac{7\sqrt{2}}{26}, \sin\theta = \frac{17\sqrt{2}}{26}$$

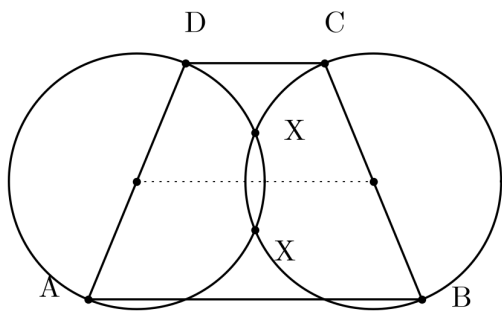
이고

$$13\sqrt{2}\cos\theta = 7, 13\sqrt{2}\sin\theta = 17$$

이므로

$$D(7, 17), C(17, 17)$$

이다. 이제 $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XD} = 0$ 은 점 X가 선분 AD를 지름으로 하는 원 위에 있다는 뜻이고, $\overrightarrow{XB} \cdot \overrightarrow{XC} = 0$ 은 선분 BC를 지름으로 하는 원 위에 있다는 뜻이다.



그림에서 두 원은 같은 높이에 중심을 두고 서로 겹친다. 곧 두 중심을 잇는 선분이 가로이므로 교점 둘은 그 선분의 수직이등분선 위에 위아래로 놓인다. 점 X가 설 수 있는 자리는 그 두 곳뿐이다.

두 원의 중심은 $\left(\frac{7}{2}, \frac{17}{2}\right)$ 과 $\left(\frac{41}{2}, \frac{17}{2}\right)$ 이고 반지름은 둘 다

$\frac{13\sqrt{2}}{2}$ 이다. 두 중심의 y 좌표가 같으므로 두 교점의

x 좌표는

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2} + \frac{41}{2}\right) = 12$$

이고, 첫째 원의 방정식에 넣으면

$$\left(12 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{17}{2}\right)^2 = \frac{169}{2}, \left(y - \frac{17}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

에서 $y = 12$ 또는 $y = 5$ 이다. 곧

$$X(12, 12) \text{ 또는 } X(12, 5)$$

이다. $\overrightarrow{AD} = (7, 17)$ 이고 $\overrightarrow{AX}$ 는 점 X의 좌표 그 자체이므로

$$7 \times 12 + 17 \times 12 = 288, 7 \times 12 + 17 \times 5 = 169$$

이고 구하는 합은

$$288 + 169 = 457$$